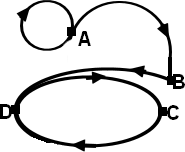
***CHAPITRE : Théorie des graphes orientés***

On appelle graphe orienté la donnée d’un ensemble X de sommets, X= {S1, S2, …, Sn} et d’un ensemble E d’Arco représentés par des couples de commets de la forme (Si, Sj)

Dans le couple (Pi, PJ), Pi est l’origine de l’arc et Sj est l’extrémité de l’arc.

**Exemple et représentation :**



On peut utiliser par exemple cet outil pour modéliser un site web. A,B,C,D représenteraient des pages web et les arc indiqueraient quelles pages doivent être accessibles à partir des autres pages.

X = {A,B,C,D}  
E = {(A,A),(A,B),(C,D),(D,C),(B,D)}

**Notations et définitions :**

* (Si,Sj) se note encore Si -> Sj

Sj est dit un processeur de Si  
Si est dit un prédécesseur de Sj

* (Si,Si) s’appelle un boucle

S1->S2->->S4->S8 s’appelle un chemin

S1 s’appelle l’origine du chemin et S8 l’extrémité du chemin

Un chemin qui a même origine et extrémité s’appelle un circuit :  
 P1->P2-P17-P1 est un circuit

Un circuit qui n’a que des sommets 2 à 2 différents sauf l’origine et l’extrémité qui sont identique s’appelle un cycle :

A B

A->B->C->D->E->C->A : est un circuit mais pas un cycle  
  
A->B->C->A : est un cycle

C

D E

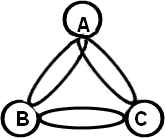
**Notations et définitions :**

* On appelle longueur d’un chemin le nombre d’arc de ce chemin. On parle aussi du nombre de pas de ce chemin

A->B->C est un chemin de longueur 2, ou de 2 pas

* A On dit que les arcs A->B et C->B sont incidents en B  
   B   
  C
* On dit que les arcs A->B et B->C sont adjacents en B  
  A B C
* A

B On dit que les arcs B->A et B->C sont émergeant en B  
 C



Matrices d’adjacence :

Soit G un graphe sa matrice d’adjacence que l’on notera M est une matrice carrée NxN où N est le nombre de sommet du graphe (encore appelé ordre du graphe. M est une matrice Booléenne (qui ne comporte que des 1 et des 0) constituée de la façon suivante :

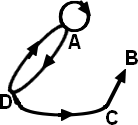
A B C D

A 1 0 0 1

B 0 0 0 0 0 : pas d’arc

C 0 1 0 0 1 : existence d’arc

D 1 0 1 0



Matrice d’un graphe complet :

1 1 … 1

Et donc le nombre d’arc est la somme de tous les 1 de la matrice  
  
nombre d’arc ) N²

1 1 1

. . .  
. . .  
. . .  
1 1 1

Dans notre exemple : Le nombre d’arc d’origine A est la somme des 1 de la première ligne…  
Le nombre d’arc total est la somme des 1 de notre matrice.  
Le nombre d’arc d’extrémité B est le somme des 1 de la deuxième colonne…  
Le nombre de boucle est la somme des 1 de la diagonal principale.

Itérons la matrice d’adjacence :

Calculons A², A^3 A B C D A B C D

A 1 0 0 1 1 0 0 1

B 0 0 0 0 0 0 0 0

C 0 1 0 0 0 1 0 0

D 1 0 1 0 1 0 1 0

A B C D

A 1 0 0 1 2 0 1 1 3 1 1 2

B 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

C 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

D 1 0 1 0 1 1 0 1 2 0 1 1

A^2 A^3

1. matrices d’

A

E

B

C

D

Fermeture transitive d’un graphe

**Préambule :**

Opération Booléennes : A+B A.B

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A  B | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A  B | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |

Pour les multiplications et addition booléennes de Matrice :

1 1 0

0 1 0

1 1 1

1 0 1 1 1 1

1.1 + 0.0 + 1.1 = 1 + 0 + 1

1 1 1 1 1 1 = 1 + 1

= 1

0 1 0 0 1 0

**Remarque :** Si A est la matrice d’adjacence d’un graphe considérée comme une matrice Booléenne

B

D

C

A

0 1 1 0

1 0 0 0

0 0 1 1

1 0 0 0

A B C D

A 0 1 1 0 1 0 1 1

Indique que l’on peut joindre D et B par un chemin (de 2 pas) d’origine D et d’extrémité B

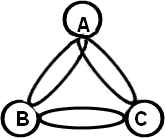
B 1 0 0 0 0 1 1 0

C 0 0 1 1 1 0 1 1

D 1 0 0 0 0 1 1 0

Définition : On appelle fermeture transitive d’un graphe G, G = (X, E), le graphe G obtenu en rajoutant l’arc Xi -> Xj s’il existe un chemin d’origine Xi et d’extrémité Xj (si cet arc n’existe pas).

Exemple type :



A

A

C

B

On obtient le graphe complet

A

B

C

B

A

D

D

C

Fermeture transitive G

Théorème : la matrice d’adjacence du graphe de la fermeture transitive s’obtient de la façon suivante :

Si N est l’ordre du graphe (son nombre de Sommet)  
 M matrice d’adjacence, M [+] M² [+] … M^[N]

Application :

A B C

A

B

C

A 0 1 0

M : B 0 0 1

C 1 0 0

0 1 0 0 1 0

0 0 1 0 0 1

1 0 0 1 0 0

0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 1 1

0 0 1 1 0 0 0 1 0 + 1 1 1

1 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1

M M^[2] M^[3] Graphe complet

Définition : On appelle chemin Hamiltonien tout chemin sur le graphe qui passe une fois et une seule par tous les Sommets du graphe.

On appelle chemin Eulérien tout chemin sur le graphe qui passe une fois et une seule par tous les arcs du graphe

Exemple :

A

C

B

A->B  
 B->C  
 C->A

E

D

C

B

A

A+C+E+D+B est hamiltoniens

Ordonnancement d’un graphe, calcul des niveaux

**Hypothèse** : on a un graphe sans circuit

B D G

A

C E H J

F I

*On fait le tableau des prédécesseurs et des niveaux*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Sommet | Prédécesseurs immédiat | niveau |
| A | - | 0 |
| B | A | 1 |
| C | A | 1 |
| D | B | 2 |
| E | B C | 2 |
| F | C | 2 |
| G | D E | 3 |
| H | B E G | 4 |
| I | F | 3 |
| J | H I | 5 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B | D | G |  |  |
| A |  | E |  | H | J |
|  | C | F | I |  |  |

0 1 2 3 4 5

Graphe valués et chemins optimaux

A chaque arc du graphe, on attribue une valeur (nombre réel positif), on supposera par la suite que le graphe est sans circuit et ordonnancé

Définition : On appelle valeur d’un chemin la somme des valeurs rencontrées dans le parcours en séquence de ce chemin

B 500 D

100 Bordeaux Dijon 400

A 500 F

Alliés 200 100 Fontenay sous-bois

C E

Clermont Evreux

Définition : On appelle chemin maximal d’origine A et d’extrémité B, tout chemin d’origine A et d’extrémité B que réalise le maximum de la valeur du parcours parmi tous ces chemins.

Un chemin optimal est soit un chemin maximal, soit un chemin minimal

Théorème : Tous sous chemin d’un chemin maximal est nécessairement maximal

Algorithme de Ford de recherche d’un chemin optimal :

B D

A F G

C E